CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

La première partie et la deuxième partie sont indépendantes.

Le but du problème est l'étude de l'espace vectoriel des solutions de l'équation aux dérivées partielles de Laplace, $\Delta F = 0$, à l'intérieur d'une sphère, avec diverses conditions aux limites.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et le point de coordonnées (x, y, z) est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ), $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, liées à x, y et z par les formules :

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

Il s'agit alors de rechercher des fonctions $F(r, \theta, \varphi)$ de classe C^2 et à valeurs réelles, vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0$$

Question préliminaire :

a, b, c, d désignent quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$. f est une fonction de la variable θ

définie sur $]a,b[$ et à valeurs réelles. g est une fonction de la variable r définie sur $]c,d[$ et à valeurs réelles. Montrer l'équivalence entre les propositions (1) et (2).

(1) $\forall \theta \in]a,b[\ , \forall r \in]c,d[\ ,\ f(\theta) = g(r)$

(2) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall \theta \in]a,b[\ ,\ f(\theta) = \lambda$ *et* $\forall r \in]c,d[\ ,\ g(r) = \lambda$

Première partie: étude des fonctions sphériques de Legendre.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions q_n et p_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ q_n(x) = \frac{(x^2-1)^n}{2^n\, n!} \quad \text{et} \quad p_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$, l'application $G_{n,k}$ de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par:

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad G_{n,k}(x) = \sqrt{(1-x^2)^k}\ \frac{d^k p_n}{dx^k}(x)$$

1-1) Montrer que p_n est un polynôme de degré n. Etudier sa parité.

Expliciter p_n pour $0 \le n \le 3$.

Expliciter $G_{n,k}$ pour $0 \le n \le 3$ et $0 \le k \le n$.

Exprimer la fonction $\frac{2}{15}\, G_{3,1}(x) + \frac{1}{5}\, G_{1,1}(x)$.

1-2) n et j étant des entiers, établir la relation:

$$\int_{-1}^{1} p_n(t)\ p_j(t)\ dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq j \\ \frac{2}{2n+1} \text{ si } n = j \end{cases}$$

Indication: Réaliser des intégrations par parties en observant que 1 et (-1) sont racines multiples du polynôme $(x^2-1)^n$.

1-3) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ p_n(x)$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[-1,1]$, de somme $f(x)$. Exprimer les coefficients (a_n, $n \in \mathbb{N}$) à l'aide de f et p_n.

1-4) Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par q_n.

En déduire que p_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante,

notée (E_n), de fonction inconnue y de la variable x :

$$(E_n) \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)\, y = 0$$

1-5) Montrer alors que la fonction $G_{n,k}$ est une solution, sur l'intervalle $]-1,1[$, de l'équation différentielle suivante, notée $(E_{n,k})$, de fonction inconnue y de la variable x :

$$(E_{n,k}) \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{(1-x^2)}\right]\, y = 0$$

Indication: il pourra être utile d'effectuer dans $(E_{n,k})$ le changement de fonction $y(x) = \sqrt{(1-x^2)^k}\; z(x)$ et de dériver k fois l'équation (E_n) .

Seconde partie: cas d'une symétrie de révolution.

Les seconde et troisième parties se placent dans le cadre où la fonction F ne dépend pas de la variable φ et sera notée $F(r,\theta,\varphi) = H(r,\theta)$.

2-1) Former la nouvelle équation aux dérivées partielles (E') vérifiée par H.

Des solutions particulières de (E') sont recherchées sous la forme $H(r,\theta) = U(r)\,V(\theta)$ où U et V sont des fonctions réelles de classe C^2 d'une seule variable .

2-2) n est un entier naturel quelconque.

En utilisant la question préliminaire, montrer que la résolution des deux équations différentielles ordinaires (S_1) et (S_2) permet de construire une famille de solutions de (E')

$$(S_1) \qquad \frac{d}{dr}\left[r^2\,\frac{dU}{dr}\right] - n(n+1)\,U \;= 0$$

$$(S_2) \qquad \frac{d}{d\theta}\left[\sin(\theta)\,\frac{dV}{d\theta}\right] + n(n+1)\,\sin(\theta)\;V \;= 0$$

2-3) Résoudre l'équation (S_1) en recherchant des solutions de la forme $U(r) = r^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Préciser le domaine de définition des diverses solutions.

Troisième partie : n est un entier naturel quelconque et R est un réel donné , $R > 1$.

3-1) Déterminer la fonction U_n solution de (S_1) bornée sur $]0,R]$ et vérifiant $U_n(1) = 1$

3-2) Dans (S_2) effectuer le changement de variable $\xi = \cos(\theta)$. Former la nouvelle équation

différentielle vérifiée par la fonction Z, définie par : $\forall\theta \in]0,\pi[$, $Z(\xi) = V(\theta)$.

Reconnaître une solution particulière de cette équation différentielle sur $]-1,1[$ et en déduire une solution particulière V_n de (S_2) sur $]0,\pi[$.

3-3) Vérifier que pour tout entier M, et pour tous coefficients réels c_n $(0 \leq n \leq M)$, la fonction H suivante est une solution de (E') sur $]0,R] \times]0,\pi[$

$$H(r,\theta) = \sum_{n=0}^{n=M} c_n\, U_n(r)\, V_n(\theta)$$

3-4) Déterminer l'entier M et les coefficients c_n $(0 \leq n \leq M)$ pour que la fonction H vérifie

$$\begin{cases} (3) & H \text{ est bornée sur }]0,R] \times]0,\pi[\\ (4) & H \text{ est une solution de } (E') \text{ sur }]0,R] \times]0,\pi[\\ (5) & H(R,\theta) + \frac{\partial H}{\partial r}(R,\theta) = 1 + \cos^2(\theta) \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

Quatrième partie :

4-1) En recherchant des solutions sous la forme $F(r,\theta,\varphi) = U(r)\, V(\theta)\, W(\varphi)$ où U, V, W sont des fonctions réelles de classe C^2 d'une seule variable réelle, montrer que, pour tout choix des réels A_n, B_n, $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$), la fonction F_n suivante est une solution de (E).

$$F_n(r,\theta,\varphi) = \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) \sum_{k=0}^{k=n} \left[\left(a_{n,k}\cos(k\varphi) + b_{n,k}\sin(k\varphi)\right)\, G_{n,k}\left(\cos(\theta)\right)\right]$$

4-2) En déduire une fonction $F(r,\theta,\varphi)$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} (6) & F \text{ est bornée sur }]0,1] \times]0,\pi[\times [0,2\pi] \\ (7) & F \text{ est une solution de } (E) \text{ dans la sphère } 0 < r \leq 1 \\ (8) & F(1,\theta,\varphi) = \cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) \text{ pour } \theta \in]0,\pi[\text{ et } \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$$